LE MOT DE L'AUTEUR

XY-MATHS CAP VERS REUSSITE cap vers **UNE COLLECTION**

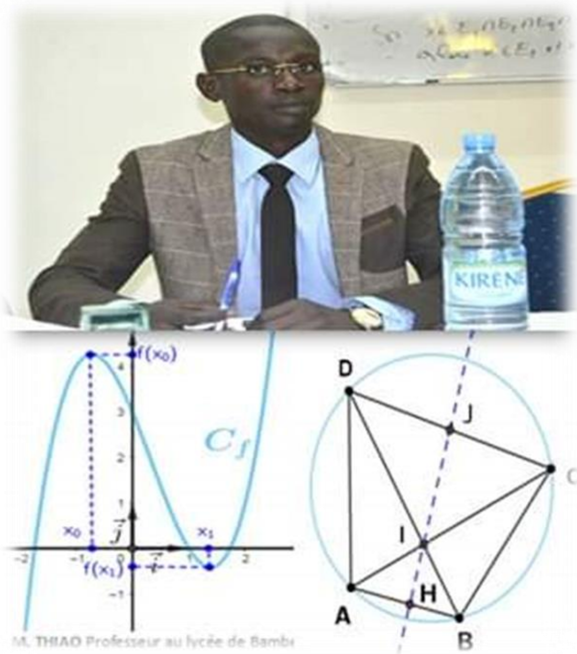
Nous avons repris dans ce manuel **XY- MATHS** cap vers la réussite $1^{e}S_2$ les principes qui avaient guidé la rédaction du manuel de seconde : **XY- MATHS** cap vers la réussite$2^{nde}S$.

Nous avons construit chacun des chapitres selon une structure simple.

- **Un cours** clair et détaillé où l'essentiel est donné (définition, remarques, théorèmes, propriétés)
- A la fin de chaque sous-titre du cours ; **des exercices d'applications** résolus pour appliquer le cours.
- **Une série d'exercices** est proposée pour chaque cours pour mettre en application les méthodes étudiées.

Nous remercions **les éditions harmattan Sénégal** pour leurs confiances renouvelées dans nos choix et leurs expertises apportées à la réalisation de l'ensemble de notre projet

Nous espérons que ce manuel sera bien accueilli et qu'il rendra à ses utilisateurs, apprenants et enseignants, les services qu'ils peuvent en attendre. Nous accueillerons avec intérêt toutes les remarques et observations qu'ils voudront bien nous adresser au 77 360 32 35 (WhatsApp)



Ce que dit le programme.....

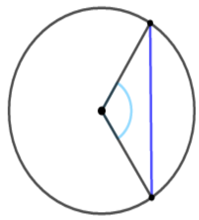
Contenus	Commentaires	Compétences exigibles
2) Angles orientés Rappels et compléments Propriétés Mesures des angles orientés Relation de Chasles **3)** Trigonométrie **Formules:** d'addition, de duplication(multiplication par 2), de linéarisation. **Equations dans R**: Equations fondamentales équations simples s'en déduisant Inéquations trigonométriques dans R	➔ On introduira la notion d'arc orienté, mais on ne s'étendra pas sur des considérations théoriques. ➔ On s'assurera sur des activités que les notions de seconde sont bien assimilées. ➔ On introduira la notation de congruence et les règles d'utilisation (addition, multiplication). La transformation de somme en produit et inversement n'est pas exigible. ➔ Dans la linéarisation, on se limitera à $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$. ➔ On traitera en travaux dirigés la résolution de l'équation : $a\cos x + b\sin x + c = 0$	➔ Connaître la relation de Chasles pour les angles orientés. ➔ Connaître les relations liant les différentes mesures ➔ Connaître le vocabulaire: mesures et mesure principale d'un angle orienté. ➔ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté connaissant une de ses mesures. Connaître et utiliser les formules d'addition, de duplication et de linéarisation ➔ Résoudre les équations $\cos x = \cos a, \sin x = \sin a, \tan x = \tan a$ ➔ Résoudre des équations se ramenant à $\cos x = \cos a, \sin x = \sin a, \tan x = \tan a$ ➔ Résoudre $\sin x \leq \sin a$, $\cos x \leq \cos a$, $\tan x \leq \tan a$

PLAN DU COURS

77 360 32 35 / 76299 00 99

APERÇU HISTORIQUE

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronautiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociables de l'astronomie. Mais on attribue à **Hipparque de Nicée (-190 ; -120)** les premières tables trigonométriques.



Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de l'arc interceptée dans le cercle.
Le grec **Claude Ptolémée** poursuit dans ***l'almageste*** les travaux **d'Hipparque** avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'Astronome et mathématicien **Regiomontanus (1436 - 1617),** de son vraie nom **Johann Muller** développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme ***sinus*.**
Au XVIe siècle, le français **François Viète (1540 -1607),** conseillé **d'Henri IV**, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connait aujourd'hui.
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

1. ANGLE ORIENTE RAPPELS ET COMPLEMENTS

1.1 ORIENTATION DU PLAN

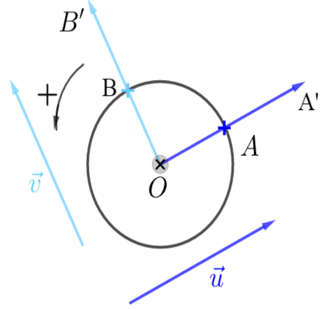
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé sens direct ou positif l'autre sens est appelé sens indirect (négatif ou rétrograde).
Orienter un plan, c'est choisir pour tous les cercles un même sens de rotation appelé sens positif. En général, on choisit comme sens positif le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé aussi sens trigonométrique.
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon r = 1

Remarque : dans la suite du chapitre on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

1.2 MESURE DE L'ANGLE ORIENTE D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS

1.2.1 Ensembles des mesures

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan orienté ; O un point quelconque et (C) le cercle trigonométrique de centre O.



On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$, les demi-droites (OA') et (OB')coupent le cercle trigonométrique (C) respectivement en A et en B.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires respectivement colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même sens qu'eux.

On appelle mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ une valeur de la distance parcourue sur le cercle trigonométrique pour aller de A vers B et comptée positivement si l'on tourne dans le sens positif, et négativement dans le sens des aiguilles d'une montre. Un angle orienté de vecteur a une infinité de mesure. Il en résulte que si α est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors les autres mesures sont de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque : les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOB}$ sont des angles géométriques de même mesure toujours positive $\widehat{BOA} = \widehat{AOB}$

❖ NOTATION :

➔ **La notation usuelle est $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, cependant s'il n'y a aucune risque de confusion, on notera seulement $(\vec{u}, \vec{v})$ cet angle orienté.**

➔ **Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures : l'écriture $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$ signifie qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{12}$; les autres mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de la forme $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.**

On écrit $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}[2\pi]$
ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12} \bmod 2\pi$

Mesure principale d'un angle oriente

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ une et une seule appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, cette mesure est la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour déterminer la mesure principale en radian l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, il convient d'écrire $(\vec{u}, \vec{v})$ sous la forme $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ de telle sorte que $\alpha \in]-\pi, \pi]$
autrement $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer la mesure principale l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$

RESOLUTION

Déterminons la mesure principale l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ par deux méthodes
Soit α la mesure principale de l'angle x alors il existe un entier relatif k tel que

$x = \alpha + k \times 2\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$

❖ Méthode algébrique

$x = \alpha + k \times 2\pi \iff \alpha = x - k \times 2\pi$

$-\pi < \alpha \leq \pi$

$\iff -\pi < \frac{273\pi}{12} - k \times 2\pi \leq \pi$

$\iff -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{273\pi}{12} + \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \quad 10,875 \ < \ k \ \leq \ 11,375$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{273\pi}{12} - 11 \times 2\pi = \ \frac{3\pi}{4}$

La mesure principale de l'angle $\frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$

❖ **Méthode pratique**

Trouvons la valeur de k entier relatif telle que $x = \alpha + k \times 2\pi$ **et** $-\pi < \alpha \leq \pi$

On effectue la division euclidienne de 273 par 12

$\frac{273\pi}{12} = \frac{(9 + 12\times22)\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 11(2\pi)$ On trouve $k = 11$ donc La mesure

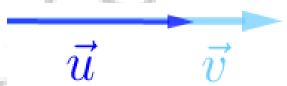
k Étant un entier relatif l'inégalité admet une seule solution $k = 11$ ainsi $\alpha = x - k \times 2\pi$

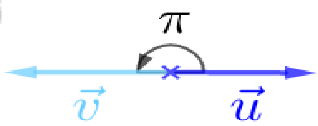
principale de l'angle $\frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$

1.2.2 Angle nul, angle plat, angles droits

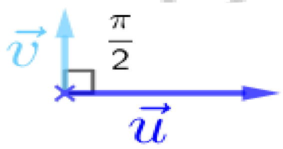
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan orienté :

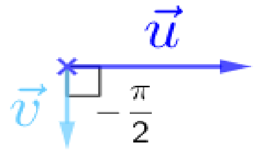
➔ **Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que la mesure principal de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à 0 (angle nul) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ou égale à π (angle plat) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.**





➔ **Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que la mesure principal de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$ (angle droit direct) ou égale à $-\frac{\pi}{2}$ (angle droit indirect)**





1.3 PROPRIETES DES MESURES DES ANGLES ORIENTES

Propriétés de base

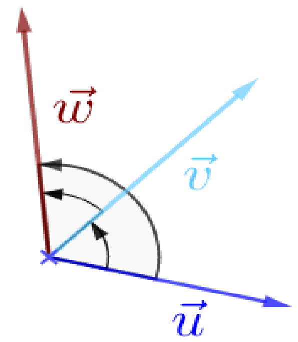
Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k \in \mathbb{R}$

$(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$

Si $k > 0$ alors $(\vec{u}, k\vec{u}) = 0$ et si $k < 0$ alors $(\vec{u}, k\vec{u}) = \pi$

Relation de Chasles

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté, on a $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})$



En additionnant n'importe quelle mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ à n'importe quelle mesure de $(\vec{v},\vec{w})$, on obtient une mesure de $(\vec{u},\vec{w})$ .réciproquement, n'importe quelle mesure de $(\vec{u},\vec{w})$ est la somme d'une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ et d'une mesure $(\vec{v},\vec{w})$.

EXEMPLE : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tel que

$(\vec{u},\vec{w}) = \frac{5\pi}{6}$ et $(\vec{w},\vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$

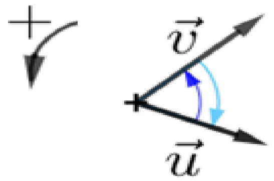
D'après la relation de Chasles $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{v}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$$(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

1.3.1 Conséquences de la relation de Chasles

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan orienté :

➔ **$(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$**

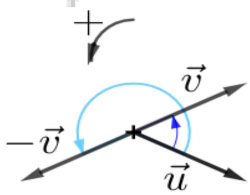


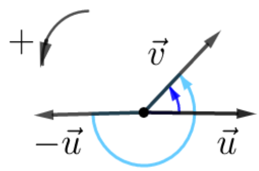
Preuve

d' après la relation de Chasles

$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) = (\vec{u},\vec{u}) = 0$ Donc $(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$

➔ **$(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$ et $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$**



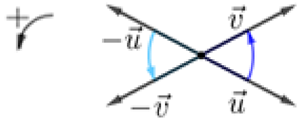


Preuve

d' après la relation de Chasles

$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = (\vec{u},-\vec{v}) = 0$ Or $(\vec{v},-\vec{v}) = \pi$ alors

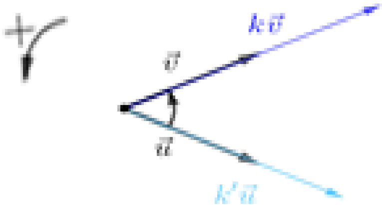
$(\vec{\mathbf{u}}\ ,-\vec{\mathbf{v}}\ ) = (\vec{\mathbf{u}}\ ,\vec{\mathbf{v}}\ ) + \boldsymbol{\pi}$



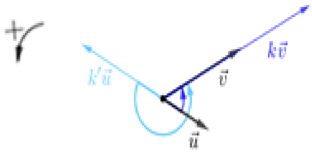
Preuve $(-\vec{u}\ ,-\vec{v}\ ) + 2\pi$ Ainsi $(-\vec{\mathbf{u}}\ ,-\vec{\mathbf{v}}\ ) = (\vec{\mathbf{u}}\ ,\vec{\mathbf{v}}\ )$

➔ **Soit $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k'}$ deux réels non nuls si :**

- ❖ **$\mathbf{k}$ et $\mathbf{k'}$ sont de même signe, alors** $(\mathbf{k}\vec{\mathbf{u}}\ ,\mathbf{k'}\vec{\mathbf{v}}\ ) = (\vec{\mathbf{u}}\ ,\vec{\mathbf{v}}\ )$



- ❖ **$\mathbf{k}$ et $\mathbf{k'}$ sont de signe contraire, alors** $(\mathbf{k}\vec{\mathbf{u}}\ ,\mathbf{k'}\vec{\mathbf{v}}\ ) = (\vec{\mathbf{u}}\ ,\vec{\mathbf{v}}\ ) + \boldsymbol{\pi}$



EXERCICE D'APPLICAT

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Déterminer par suite les mesures des angles : $(\vec{u}\ ,-\vec{v}\ )$; $(-\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$; $(\vec{v}\ ,-\vec{u}\ )$ et $\left(-3\vec{u}\ ,\frac{1}{2}\vec{v}\ \right)$

2) Prouver que dans un triangle, la somme des mesures positives de ses angles est égale π

RESOLUTION

1) Déterminons les mesures des angles : $(-\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$; $(\vec{v}\ ,-\vec{u}\ )$ et

- ❖ $(\vec{u}\ ,-\vec{v}\ ) = (\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) + (\vec{v}\ ,-\vec{v}\ ) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ $\boxed{(\vec{u}\ ,-\vec{v}\ ) = \frac{4\pi}{3}}$
- ❖ $(-\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) = (-\vec{u}\ ,\vec{u}\ ) + (\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ $\boxed{(-\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) = \frac{4\pi}{3}}$
- ❖ $(\vec{v}\ ,-\vec{u}\ ) = (\vec{v}\ ,-\vec{v}\ ) + (-\vec{v}\ ,-\vec{u}\ ) = \pi + \frac{\pi}{3} =$

1.4 DETERMINATION DANS UNE FIGURE LA MESURE D'UN ANGLE ORIENTE

POINT METHODE

En pratique, pour déterminer une mesure d'un angle orienté, on utilise les propriétés de la figure (carré, triangles isocèles ou équilatéraux ….) pour obtenir la mesure de l'angle géométrique correspondant. Le signe est donné par le sens de rotation que l'on emprunte lorsque l'on « décrit cet angle » : positif si l'on tourne dans le sens positif et négatif dans sens des aiguilles d'une montre.

On peut également utiliser les égalités de vecteurs, les propriétés des angles orientés, en particulier la relation de Chasles. Si de plus on demande la mesure principale d'un angle orienté, on doit vérifier que la valeur trouvée appartient à l'intervalle $]-\pi\ ,\pi]$.si ce n'est pas le cas on cherchera la mesure principale

▶EXERCICES D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1 :

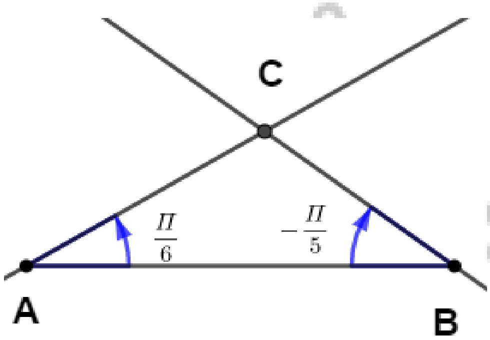
1) Construire un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{5}$

2) Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés :

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

RESOLUTION

1) Construisons un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{5}$



2) Déterminons une mesure principale de chacun des angles orientés :

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = (-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \frac{7\pi}{6}$

Or $\frac{7\pi}{6}$ pas une mesure principale ; $\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi$ ainsi la mesure principale $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ **est** $-\frac{5\pi}{6}$.

b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$ D'après la relation de Chasles

D'où $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{30}$

Ainsi la mesure principale $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ **est** $\frac{11\pi}{30}$.

c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$ D'après la relation de Chasles

D'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (-\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, -\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5} + \pi = \frac{19\pi}{30}$

Ainsi la mesure principale $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ **est** $\frac{19\pi}{30}$

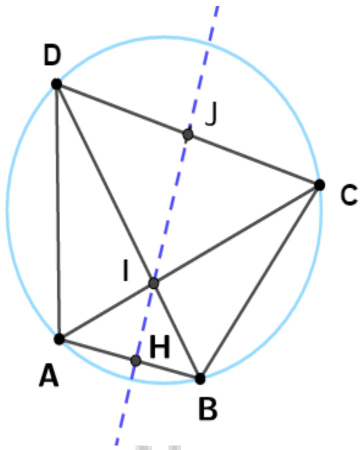
EXERCICE 2 :

Dans le plan orienté, ABCD est un quadrilatére inscrit dans un cercle dont les diagonales se coupent en I et vérifient $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$

J est le milieu de [CD] et (IJ) coupe (AB) en H.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires en évaluant.

Soit θ la mesure principale de l'angle$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.



1) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \theta + \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

2) a) exprimer $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\right)$ en fonction de θ.

   b) Montrer que le triangle DIJ est isocèle.

   c) En déduire $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right)$ en fonction de θ

3) Conclure

RESOLUTION

1) Montons que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \theta + \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

D'après la relation de Charles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) + 2K\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Or les vecteur $\vec{IC}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ainsi $\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{IJ}}\right) = \boldsymbol{\theta + 2k\pi} + \left(\overrightarrow{\mathbf{IC}}, \overrightarrow{\mathbf{IJ}}\right) + \mathbf{2K\pi} \ (\mathbf{k} \in \mathbb{Z})$

2) a) Exprimer $\left(\overrightarrow{\mathbf{DI}}, \overrightarrow{\mathbf{DJ}}\right)$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$.

On a les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DB}$ d'une part et les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DC}$ d'autre part sont colinéaires et de même sens alors$\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\right) = \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, de plus les angles géométrique $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont des angles inscrit qui intercepte le même arc$\widehat{BC}$. Ils ont donc la même mesure. Comme les angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$ sont orientés dans le même sens direct alors $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) Montrons que le triangle DIJ est isocèle.

D'après l'énoncé, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires en I alors le triangle DIC est rectangle en I. On en déduit que ce triangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de [CD] autrement le point J.

On en conclut que JC = JD = JI d'où le triangle DIJ est isocèle en J

c) déduisons $\left(\overrightarrow{\mathbf{IC}}, \overrightarrow{\mathbf{IJ}}\right)$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$

$\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IJ}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{ID}\right)$. Les angles à la basse d'un triangle isocèle ont même mesure par conséquent d'après la question b) ; $\text{mes}(\widehat{JID}) = \text{mes}(\widehat{JID})$. de plus les angles $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{ID}\right)$ sont direct alors $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\right) = \left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{ID}\right)$ ainsi $\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{ID}\right) = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ d'où

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

3) Conclusion

D'après les questions 1) et c) on a :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \theta + 2k\pi + \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) + 2K\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \theta + 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta + 2K\pi = \frac{\pi}{2} + (2k'\pi) \quad (k' \in \mathbb{Z})$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right) = \frac{\pi}{2} + (k'\pi) \quad (k' \in \mathbb{Z})$ On en déduit que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaire.

2. TRIGONOMETRIE

2.1 RAPPELS

2.1.1 lignes trigonométriques d'un angle oriente

Sauf indication contraire, l'unité utilisé est le radian, le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on considère le cercle trigonométrique (C) de centre O

Définitions

❖ **Cosinus et Sinus d'un réel :**

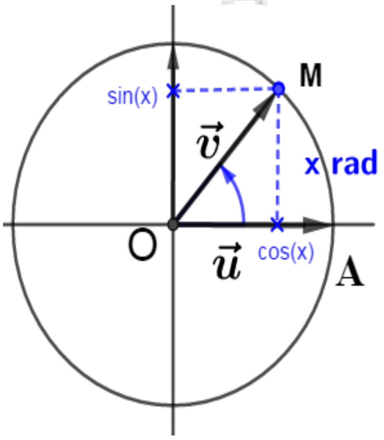
Pour tout réel x , il existe un point M unique du cercle trigonométrique (C) telque x soit une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$

➔ **l'abscisse du point M est le cosinus de x noté cos(x) ou cosx**

➔ **l'ordonnée du point M est le sinus de x noté sinus(x) ou sin(x)**

❖ **Cosinus et Sinus d'un angle orienté**

soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan , le cosinus (respectivement le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une de ses mesures quelconque. on note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$



Liens entre cosinus de l'angle orienté et celui de l'angle géométrique

Soit θ la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et notons x la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, on a $\theta = |x|$ ainsi deux cas se présentent :

➔ si $x \geq 0$; $|x| = x$ alors $\cos(\theta) = \operatorname{cox}(x)$

➔ si $x \leq 0$; $|x| = -x$ alors $\cos(\theta) = \operatorname{cox}(-x) = \operatorname{cox}(x)$

NB : Pour le cas de sinus on a $\sin(\theta) = |\sin(\vec{u},\vec{v})|$

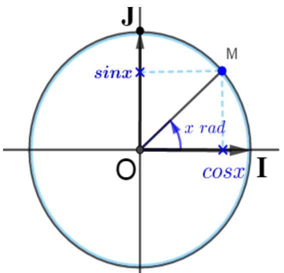
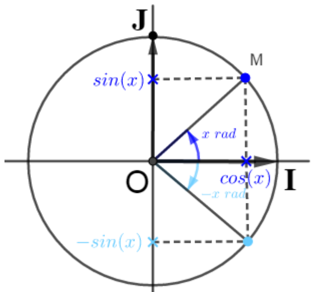
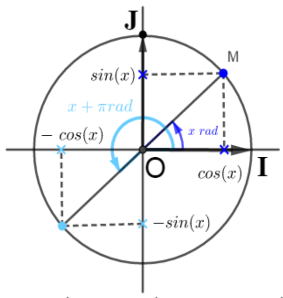
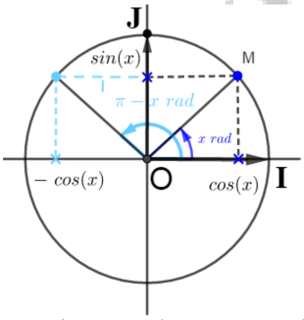
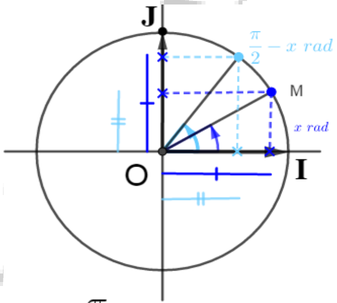
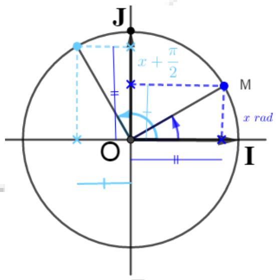
2.1.2 lignes trigonométrique des angles remarquables

le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir

Angles	$0\ rd$	$\frac{\pi}{6}\ rd$	$\frac{\pi}{4}\ rd$	$\frac{\pi}{3}\ rd$	$\frac{\pi}{2}\ rd$	$\frac{2\pi}{3} rd$	$\frac{3\pi}{4}\ rd$	$\frac{5\pi}{6}\ rd$	$\pi\ rd$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2.1.3 lignes trigonométrique des angles associés

Soit $\hat{x}$ un angle orienté de mesure principale mesure x ; les angles orientés de mesures $-x$; $\pi - x$; $\pi + x$; $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$ sont appelés angles associés à l'angle x.

Formules des angles égaux	Formules des angles opposés	Formules des angles anti-supplémentaires
 $cos(x+2\pi) = cos(x)$ $sin(x+2\pi) = sin(x)$	 $cos(-x) = cos(x)$ $sin(-x) = -sin(x)$	 $cos(x+\pi\ ) = -cos(x)$ $sin(x+\pi) = -sin(x)$
Formules des angles supplémentaires	**Formules des angles complémentaires**	**Formules des angles anti-complémentaires**
 $cos(\pi - x\ ) = -cos(x)$ $sin(\pi - x) = sin(x)$	 $cos(\ \frac{\pi}{2} - x\ ) = sin(x)$ $sin(\ \frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$	 $cos(x + \frac{\pi}{2}\ ) = -sin(x)$ $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$

NB :
La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π −périodique et impaire.
La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π −périodique et paire.

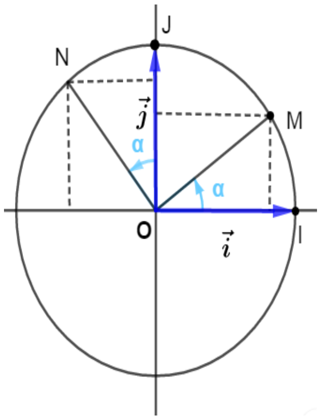
PREUVE :

➔ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

➔ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}; \vec{j})$
On appelle I le point de coordonnées $(-1; 0)$; J le point de coordonées $(0; 1)$ et Q le point de coordonnées $(0; 1)$.
soit α un réel, M le point du cercle trigonométrique correspondant α et N le point du cercle trigonométrique correspondant à $\frac{\pi}{2} + x$.

On a ainsi $\overrightarrow{ON} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\vec{j}$



Dans le repère $(O, \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OQ})$ le point N correspond sur le cercle trigonométrique au réel α .

On peut ainsi écrire : $\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\overrightarrow{OJ} + \sin\alpha\overrightarrow{OQ}$ $\langle 1 \rangle$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \cos\alpha\vec{j} + \sin\alpha(-\vec{i})$

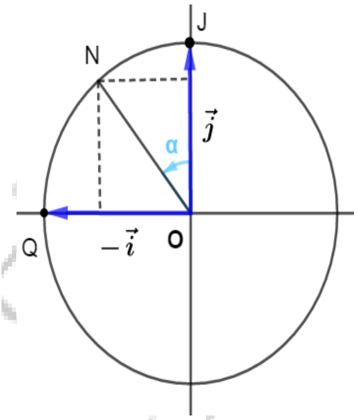
$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = -\sin\alpha(\vec{i}) + \cos\alpha\vec{j}$ $\langle 2 \rangle$

De l'égalité $\langle 1 \rangle$ et $\langle 2 \rangle$ on a :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\vec{j} = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement leurs coordonnées sont égaux, ainsi

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\alpha \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\alpha}$$



➔ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

➔ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

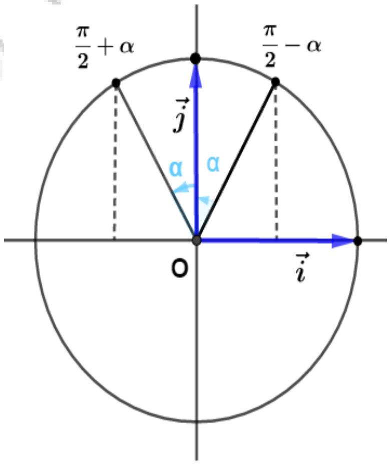
Les points du cercle trigonométrique correspondant aux réels $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc ces deux points ont des abscisses opposées et des ordonnées égales.

On a ainsi :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

Donc $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha}$



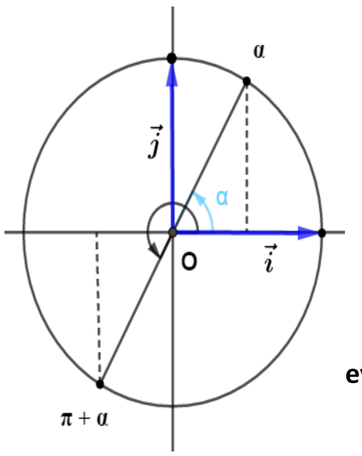
➔ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

➔ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

Les points du cercle trigonométrique correspondant aux réels α et $\pi + \alpha$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. Donc ces deux points ont des abscisses opposées et des ordonnées aussi opposées.

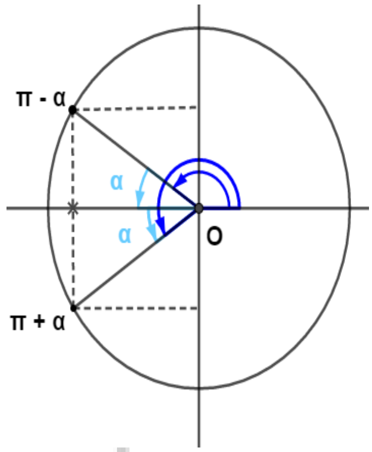
Ainsi :

$$\boldsymbol{\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \text{ et } \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)}$$



➔ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

➔ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$



Les points du cercle trigonométrique correspondant aux réels $\pi + \alpha$ et $\pi - \alpha$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Donc ces deux points ont des abscisses égales et des ordonnées opposées.

On a ainsi :

$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos$ et

$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

Donc

$\mathbf{\cos(\pi - x) = -\cos(x)}$ **et** $\mathbf{\sin(\pi - x) = \sin(x)}$

IMPORTANT

- **il faut savoir retrouver toutes ces égalités à partir du dessin**
- **les égalités** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, **et sont particulièrement importantes car elles permettent de transformer un cosinus en sinus et un sinus en cosinus.**

EXERCICE D'APPLICATION :

1) vérifier que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) on donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a) Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

b) En déduire les valeurs exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

RESOLUTION

1) vérifions que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On a $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Ainsi on $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ d'où $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) on donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a) Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

❖ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On a $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ d'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

❖ $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$\boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$

b) Déduisons les valeurs exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

❖ $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{12\pi-\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

❖ $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{12\pi-\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

❖ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

❖ $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{6\pi-\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

2.2 FORMULES: D'ADDITION, DE DUPLICATION ET DE LINEARISATION

2.2.1 Formules d'addition et de soustraction

Les formules d'additions ou de soustraction, nous permettent de calculer les lignes trigonométriques de la somme ou de la différence de deux nombres connaissant leurs lignes trigonométriques

PROPRIETES

Pour tout nombre réels α et β on a les propriétés suivantes :

➔ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

➔ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

➔ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

➔ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

Pour tout α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ on a :

➔ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

➔ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

PREUVE :

Nous allons démontrer les 6 formules d'addition et de soustraction données ci-dessus.

❖ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$

❖ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

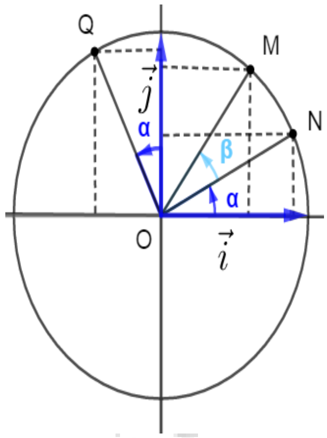
Le plan est muni repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit α et β deux réels.

Soit N le point du cercle trigonométrique correspondant à α.

soit Q le point du cercle trigonométrique correspondant à $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à $\alpha + \beta$.



Les coordonnées de N sont $(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

Les coordonnées de Q sont :

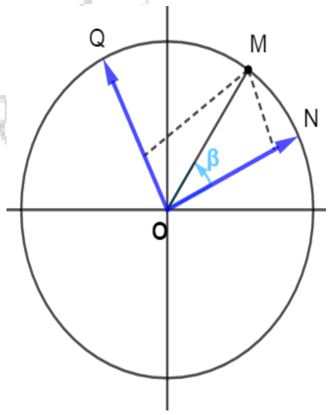
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right); \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = (-\sin\alpha; \cos\alpha)$$

On en déduit que :

$\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OQ} = -\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath}$

Dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OQ})$, le point M correspond sur le cercle au nombre réel β.



On $\overrightarrow{OM} = \cos\beta\overrightarrow{ON} + \sin\beta\overrightarrow{OQ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \cos\beta(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}) + \sin\beta(-\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \cos\beta\cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\sin\alpha\vec{\jmath} - \sin\beta\sin\alpha\vec{\imath} + \sin\beta\cos\alpha\vec{\jmath}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \cos\beta\cos\alpha\vec{\imath} - \sin\beta\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\sin\alpha\vec{\jmath} + \sin\beta\cos\alpha\vec{\jmath}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)\vec{\imath} + (\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)\vec{\jmath}$

d'autre part, le point M est dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le point du cercle trigonométrique correspondant à $\alpha + \beta$.

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha + \beta)\vec{\imath} + \sin(\alpha + \beta)\vec{\jmath}$; on a ainsi l'égalité suivant

$\cos(\alpha + \beta)\vec{\imath} + \sin(\alpha + \beta)\vec{\jmath} = (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)\vec{\imath} + (\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)\vec{\jmath}$

D'où

$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha}$ **et** $\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha}$

❖ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$

❖ $\sin(\alpha + (-\beta)) = \cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta$

les égalités ci-dessus étant valables pour tous les réels α et β, on peut les utiliser avec α et $-\beta$. on a ainsi :

➔ $\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(-\beta)\cos\alpha - \sin(-\beta)\sin\alpha = \boldsymbol{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}$

D'où $\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}$

➔ $\sin(\alpha + (-\beta)) = \cos(-\beta)\sin\alpha + \sin(-\beta)\cos\alpha = \cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta$

D'où $\boldsymbol{\sin(\alpha + (-\beta)) = \cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta}$

❖ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

D'où $\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$

❖ $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

l'égalité ci-dessus étant valable pour tous les réels α et β , on peut l'utiliser avec α et −β . on a ainsi :

$$\tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(-\beta)} = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

D'où $\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$

Les formules de duplication servent particulièrement à déterminer la valeur exacte du sinus ou du cosinus d'un réel de somme ou de différence de deux réels dont les valeurs du cosinus et du sinus sont respectivement connues.

Exemple :

Pour déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$, on peut écrire : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Ainsi : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Exprimer en fonction de cos(x) et sin(x) les expressions suivantes : $\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\sin(x+\frac{\pi}{4})$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ et $\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$

2) Calculer $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan(\frac{5\pi}{12})$

RESOLUTION

1) Exprimons en fonction de cos(x) et sin(x) les expressions suivantes :

❖ $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\boldsymbol{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)}$$

❖ $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\boldsymbol{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)}$$

❖ $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\boldsymbol{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)}$$

❖ $\cos(\frac{\pi}{4}-x) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)$

$$\boldsymbol{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x)+\sin(x))}$$

❖ $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\sin(x)$

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)}$$

2) Calculer $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan(\frac{5\pi}{12})$

❖ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}$$

❖ $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}$$

❖ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)} = 2+\sqrt{3}$

$$\boldsymbol{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}}$$

2.2.2 Formules de duplication (on double l'angle)

Les formules de duplications sont déduites des formules d'addition

- ➔ $\boldsymbol{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)}$
- ➔ $\boldsymbol{\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$
- ➔ $\boldsymbol{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}$, avec α , $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

PREUVE :

Les preuves des formules de duplications sont immédiates en utilisant les formules d'addition.

- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ ⟨1⟩
- $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ ⟨2⟩
- $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ ⟨3⟩

On a : $\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$; si $\alpha = \beta$ alors l'égalité devient :

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}$ ⟨1⟩

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1}$ ⟨2⟩

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \left(1 - \sin^2(\alpha)\right) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha}$ ⟨3⟩

- $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

On a $\sin(\alpha + \beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$; si $\alpha = \beta$ alors l'égalité devient :

$\sin(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$

D'où $\mathbf{\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$

- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(\alpha)}$

On a: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$; si $\alpha = \beta$ alors l'égalité devient :

$\tan(2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

D'ou $\mathbf{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(\alpha)}}$

EXERCICE D'APPLICATION

1) exprimer en fonction des $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les expressions suivantes :

$\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$; $\sin(2\alpha + \pi)$; $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})$, $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4})$

2) On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes :

$\cos\alpha$, $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$, $\cos(3\alpha)$

RESOLUTION

1) exprimons en fonction des $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les expressions:

$\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha + \pi) = -\sin(2\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha$, $\mathbf{\sin(2\alpha + \pi) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha)$

$\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)$

$\mathbf{\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha)}$

$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\alpha)$

$\Leftrightarrow \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\boldsymbol{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}$

$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\alpha)$

$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\boldsymbol{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}$

2) soit α un réel tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

Calculons les valeurs exactes des expressions

- $\cos\alpha$; On a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Ou $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Or $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ donc $\boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ $\boldsymbol{\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}}$
- $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha)$

$\Leftrightarrow \sin(3\alpha) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \cos(2\alpha)$

Or $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin\alpha^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

Ainsi $\sin(3\alpha) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{23}{27}$ $\boldsymbol{\sin 3\alpha = \frac{23}{27}}$

- $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$

$\Leftrightarrow \cos(3\alpha) = \frac{7}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$ $\boldsymbol{\cos 3\alpha = -\frac{10\sqrt{2}}{27}}$

2.2.3 Formules de Carnot

Lazare Carnot est un homme politique, militaire et mathématicien français. Il est né à Nolay, en Bourgogne, en 1753. Il entre à 16 ans à l'École de génie de Mézières où il suit les cours de Gaspard Monge. Ingénieur militaire en 1773. Son fils est le physicien Sadi Carnot, à qui l'on doit le second principe de la thermodynamique. Son petit-fils, nommé Sadi Carnot lui aussi, est Président de la IIIe République de 1887 à son assassinat en 1894.

Ces formules permettent de factoriser une expression trigonométrique

$\boldsymbol{1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha)}$ **et** $\boldsymbol{1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)}$

Conséquence

Si on remplace α par $\frac{\alpha}{2}$, on obtient les formules suivantes :

$\boldsymbol{1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ **et** $\boldsymbol{1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

2.2.4 Formules de linéarisation ou bissection

Linéariser une expression trigonométrique revient à réécrire cette expression sous une forme qui ne contient plus d'exposant. Les formules de linéarisation découlent des formules duplication.

Pour tout réel α, on a les égalités suivantes :

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Conséquence

Si on remplace α par $\frac{\alpha}{2}$, on obtient les formules suivantes :

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

PREUVE :

$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

On a $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$ d' ou $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

On a $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha)$ d'où $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

Les formules de linéarisation servent à déterminer la valeur exacte du cosinus ou du sinus d'un angle.

Exemple :

Pour déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on peut écrire : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$

Ainsi $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos(\frac{1}{4})}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ d'où $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Déterminer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$

2) En déduire les valeurs exactes de :

$\sin(\frac{5\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\tan(\frac{5\pi}{12})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$, $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\tan(\frac{7\pi}{12})$

RESOLUTION

1) Déterminons les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos(\frac{1}{6})}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \cos(\frac{1}{6})}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

$\tan = \frac{\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ $\boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

2) Déduisons les valeurs exactes de : $\sin(\frac{5\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\tan(\frac{5\pi}{12})$

On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi + 4\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\frac{\pi}{12})$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\frac{\pi}{12})$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$\tan(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{12})}{\cos(\frac{5\pi}{12})} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 5 + 2\sqrt{3}$

$\boldsymbol{\tan(\frac{5\pi}{12}) = 5 + 2\sqrt{3}}$

2.3 EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Une équation trigonométrique est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît par l'intermédiaire d'un nombre trigonométrique. Pour résoudre une équation trigonométrique, on essaie généralement de la transformer en une ou plusieurs équations trigonométriques "de base". Chacune de ces équations donne un ensemble de solutions. Ces équations fondamentales se résolvent à l'aide de principes d'équivalence qui les transforment en équation(s) algébrique(s) équivalentes. Contrairement aux équations algébriques, une équation trigonométrique admet une infinité de solutions. Les solutions comprises dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont dites solutions fondamentales. Il est courant de devoir représenter les solutions fondamentales sur le cercle trigonométrique. C'est d'ailleurs souvent la méthode la plus simple pour comparer des ensembles de solutions qui paraissent différents.

2.3.1 Equations élémentaires

Une équation trigonométrique est dite élémentaire si elle peut être ramenée à une des formes suivantes :

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad , \quad \cos\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \tan\beta$$

Nous constatons que :

$\sin\alpha = \sin\beta \iff \alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

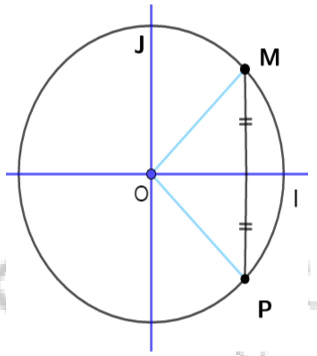
$\cos\alpha = \cos\beta \iff \alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = -\beta + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan\alpha = \tan\beta \iff \alpha = \beta + k\pi$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

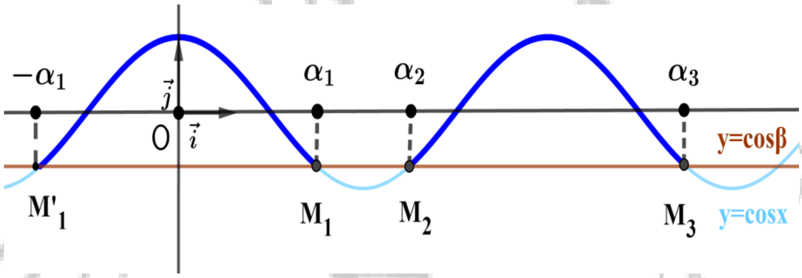
❖ **Interprétation de : $\cos\alpha = \cos\beta$**

➔ **sur un cercle trigonométrique**

$\cos\alpha = \cos\beta$ Signifie que les points M et P d'un cercle trigonométrique tels que $\alpha = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $\beta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$ sont soit confondus soit symétriques par rapport à l'axe des **abscisses**.



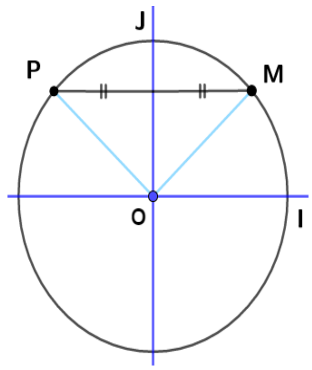
➔ **sur la représentation graphique de la fonction cosinus**



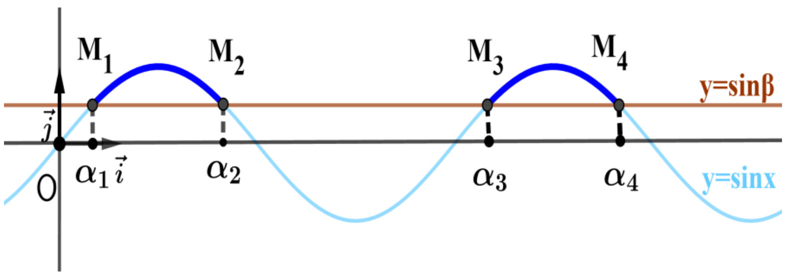
Les abscisses a_i des points M_i d'intersection de la courbe représentative de la fonction cosinus et de droite d'équation $y = \cos b$ sont telles que $\cos a_i = \cos b$

❖ **Interprétation de : $\sin\alpha = \sin\beta$**

$\sin\alpha = \sin\beta$ Signifie que les points M et P d'un cercle trigonométrique tels que $\alpha = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $\beta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$ sont soit confondus soit symétriques par rapport à l'axe des **ordonnées**.



➔ **sur la représentation graphique de la fonction sinus**



Les abscisses a_i des points M_i d'intersection de la courbe représentative de la fonction sinus et de droite d'équation $y = \sin b$ sont telles que $\sin a_i = \sin b$

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUTION

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ , } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ , } -\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{24} + 2k\pi$ ou $x = \frac{26\pi}{24} + 2k\pi = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi = \frac{-11\pi}{12} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-11\pi}{12} + 2k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi , \frac{-11\pi}{12} + 2k\pi + k\pi\right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$\Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{2} + k\pi = \frac{4\pi}{3} + 4\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4\pi}{3} - k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{-\frac{4\pi}{3} - k\pi\right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

2.3.2 Equations utilisant les propriétés des angles associés

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

E_1 : $\sin x = \cos x$

E_2 : $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

E_3 : $\sin(2x) = \cos(3x)$

RESOLUTION

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

E_1 : $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $0x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $0x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (impossible)

$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

E_2 : $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

$x = \frac{5\pi}{14} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{14} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi \,;\, -\frac{5\pi}{14} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

E_3 : $\sin(2x) = \cos(3x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi$ ou $3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 3x + 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $3x - 2x + = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \,;\, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

2.3.3 Equations à transformer par les formules trigonométriques de basse

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

E_1 : $3\sin x = 2\cos^2 x$

E_2 : $\cos 2x = \cos x - 1$

RESOLUTION

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

E_1 : $3\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 3\sin x - 2\cos^2 x = 0$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$E_1 \Leftrightarrow 3\sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

Effectuons un changement de variable ; posons $X = \sin x$

L'équation devient : $2X^2 + 3X - 2 = 0$

$\Delta = 25$; $X_1 = -2$ et $X_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = -2$ Impossible

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{6})$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

E_2 : $\cos 2x = \cos x - 1$ $\Leftrightarrow$ $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

On a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$E_2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 2\cos^2 x - \cos x = \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou

$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

2.3.4 Equation homogènes en sinus et cosinus

Généralité et technique

Une équation trigonométrique est dite homogène en sinus et cosinus lorsque la somme des degrés du sinus et du cosinus de chacun de ses termes est une constante.

Pour résoudre une telle équation, on suit la procédure suivante.

- Mise en évidence des termes en sinx et cosx affectés de leur plus haute puissance, ce qui nous amène à résoudre des équations du type $\sin x = 0$ ou $\cos x = 0$.
- si l'équation restante est du $n^{éme}$ degré, on la raméne à une équation polynomiale en tanx en divisant tous les termes par $\cos^n x$. En posant alors $\tan x = X$, on résout l'équation en X (du second degré, ou en utilisant Horner)

Il reste alors à déterminer les valeurs de x correspondant

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante

E : $\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x = 0$

RESOLUTION

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante

E : $\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

$\sin x = 0 \quad x = k\pi$

$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

$\cos x = 0$ n'est pas solution de l'équation, divisons toute l'équation par $\cos^2 x$

$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + 3\tan x - 1 = 0$

Posons : $X = \tan x$

$X^2 + 3X - 1 = 0$

$\Delta = 13$, $X_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ et $X_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

$\tan x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = 0.294 + k\pi$

$\tan x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.276 + k\pi$

$\mathbf{S = \{\ k\pi\ ;\ 0.294 + k\pi\ ;\ -1.276 + k\pi\ \}}$

2.3.5 Equations linéaires en sinx et cosx

Généralité et technique

Une équation trigonométrique est dite linéaires en sinx et cosx si elle peut s'écrire sous la forme $\mathbf{a\cos x + b\sin x = c}$ avec a, b, c des réels non nuls.

Pour résoudre une telle équation, on procède ainsi.

$a\cos x + b\sin x = c \quad \Leftrightarrow \quad \cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$

On pose $\frac{b}{a} = \tan\alpha \Rightarrow \cos x + \tan\alpha \sin x = \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin x = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha$

$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$

Nous constatons que le second membre de cette dernière équation est une expression dont on peut calculer la valeur numérique. il, s'agit donc toujours d'une équation élémentaire que l'on peut résoudre.

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$E_1 : 3\cos x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$E_2 : \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$E_3 : \sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1 = 0$

RESOLUTION

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\mathbf{E_1 : 3\cos x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0} \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x + 1 = 0$

Posons $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{6}$

On obtient : $\cos x + \tan\alpha\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin x + 1 = 0$

$\cos x \cos\alpha + \sin x\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = -\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x - = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{S = \left\{\ \pi + 2k\pi\ ;\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ \right\}} \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{E_2 : \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2} = 0$

Posons $\tan\alpha = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{3})$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$

On obtient : $\cos x + \tan\alpha \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x + \tan(\frac{\pi}{3})\sin x - \sqrt{2} = 0$

$\cos x \operatorname{cox}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\frac{\pi}{4})$

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $x = -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ ; -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{E_3}$: $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Posons $\tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{4})$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$

On obtient : $\cos x + \tan\alpha \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\cos x \operatorname{cox}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{ \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \ ; -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

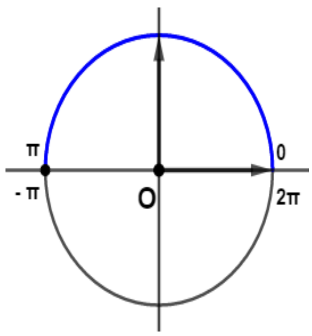
2.4 INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

La résolution d’inéquations trigonométriques est moins méthodique que celle des équations. Une bonne approche en général est de résoudre l’équation correspondante puis d’identifier les solutions sur le cercle trigonométrique. Les solutions d’une inéquation trigonométriques sont généralement une union d’intervalles, dont les bornes sont les solutions de l’équation correspondantes.

2.4.1 Inéquations de base

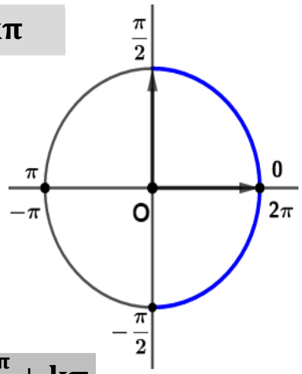
- **$\sin x \geq 0$**

On a $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi}$



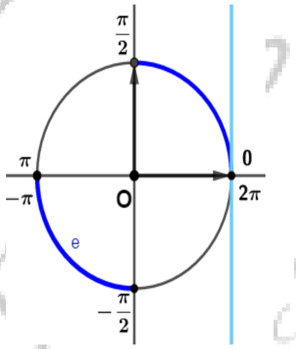
❖ **$\cos x \geq 0$**

On a $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$



❖ **$\tan x \geq 0$**

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; on a $\tan x \geq 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi}$



2.4.2 Inéquations du premier degré

Généralité et technique

Une inéquation trigonométrique est dite du premier degré si elle peut s'écrire sous les formes suivante : $\sin x \geq a$, $\cos x \geq a$ ou $\tan x \geq a$, avec a un réel non nul .

Pour résoudre une inéquation de type, on peut suivre la procédure suivante.

- Résoudre d'abord l'équation associée en cosinus, sinus ou tangente selon le cas ;
- tracer par la suite le cercle trigonométrique ;
- placer sur le cercle, les points d'abscisses curvilignes respectives des solutions de l'équation ;
- tracer l'arc du cercle correspondant à l'inéquation ;
- déterminer les solutions de l'intervalle I donné.

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans l'intervalle I indiqué

a) $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$; $I_1 = [-\pi, \pi]$ et $I_2 = [0, 2\pi]$

b) $\sqrt{2}\sin x - 1 \leq 0$; $I = [-\pi, 0]$

c) $\tan x + \sqrt{3} \geq 0$; $I_1 = [0, 2\pi]$ et $I_2 =]-\pi, \pi]$

d) $1 - 2\left(\cos(4x) - \frac{\pi}{3}\right) > 0$; $I =]-\pi, \pi]$ et $I_2 =]0, 2\pi]$

e) $2\cos x - 1 \leq 0$; $I = [-\pi, 2\pi]$

RESOLUTION

Résolvons les inéquations suivantes

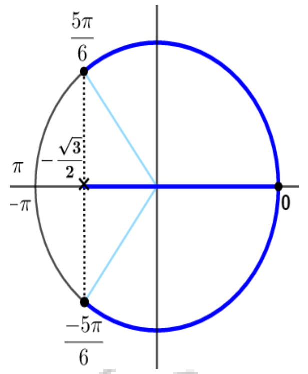
a) $\mathbf{\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0}$ **;** $\mathbf{I = [-\pi\ ,\pi\,]}$ **et** $\mathbf{I_2 = [0\ ,2\pi\,[}$

$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Posons $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\mathbf{x} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\mathbf{x} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



$\mathbf{S_{[-\pi\ ,\ \pi]} = \left[-\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right]}$

$\mathbf{S_{[0\ ,2\pi\,[} = \left[0\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right[}$

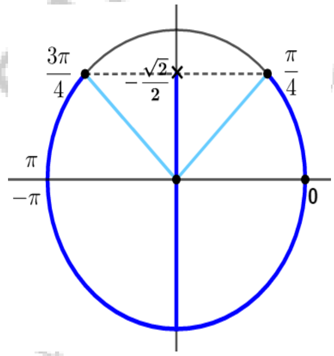
b) $\mathbf{\sqrt{2}\sin x - 1 \leq 0}$ **;** $\mathbf{I = [-\pi\ ,0\,]}$

$\sqrt{2}\sin x - 1 \leq 0 \iff \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Posons $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



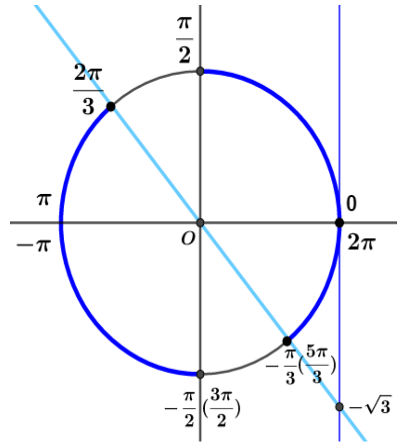
$\mathbf{S_{[-\pi\ ,0\,]} = [-\pi\ ,0\,]}$

c) $\mathbf{\tan x + \sqrt{3} \geq 0}$ **;** $\mathbf{I_1 = [0\ ,2\pi\,]}$ **et** $\mathbf{I_2 = \,]-\pi\ ,\pi\,]}$

$\tan x + \sqrt{3} \geq 0 \iff \tan x \geq -\sqrt{3}$

Posons $\tan x = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$



$\mathbf{S_{[0\ ,2\pi\,[} = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{3}\ ;2\pi\right]}$

$\mathbf{S_{]-\pi\ ,\pi\,]} = \left]-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\pi\right]}$

d) $\mathbf{1 - 2\left(\cos 4x - \frac{\pi}{3}\right) > 0}$ **;** $\mathbf{I = \,]-\pi\ ,\pi\,]}$ **et** $\mathbf{I_2 = \,]0\ ,2\pi\,]}$

$1 - 2\left(\cos(4x) - \frac{\pi}{3}\right) > 0 \iff \left(\cos(4x) - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$

$\left(\cos(4x) - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2} \iff 4x - \frac{\pi}{3} \in \left]-\pi\ ,-\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right[$

$4x-\frac{\pi}{3} \in \left]-\pi , -\frac{\pi}{3}\right[\quad \Leftrightarrow -\pi < 4x-\frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < x < 0$

$4x-\frac{\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{3} ; \pi\right[\quad \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < 4x-\frac{\pi}{3} < \pi \quad \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

$$S_{]-\pi ,\pi]} = \left]-\frac{\pi}{6} ; 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right[$$

$$S_{[0 ,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[$$

e) $2\cos x - 1 \leq 0$; $I = [-\pi , 2\pi]$

$2\cos x - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \leq \frac{1}{2}$

Posons $\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{3})$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

▪ $-\pi \leq x \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad -1 - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi$; $k = 0$ alors $x = \frac{\pi}{3}$

▪ $-\pi \leq x \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

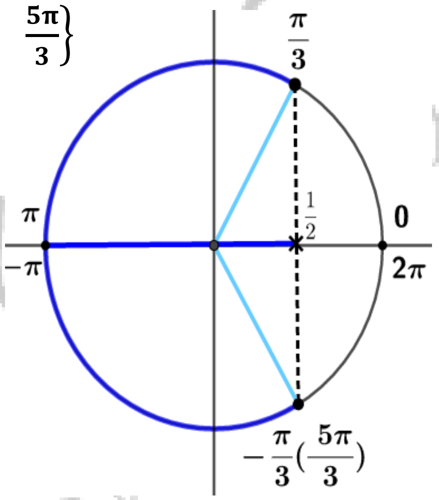
$\Leftrightarrow -1 + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi$; $k = 0$ ou $k = 1$ alors

Pour $k = 0$; $x = -\frac{\pi}{3}$

Pour $k = 1$; $x = \frac{5\pi}{3}$

Les solutions de l'équations $2\cos x - 1 \leq 0$ sur l'intervalle $I = [-\pi , 2\pi]$ sont :

$S_{]-\pi ; 2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$



Dressons le tableau de signe de l'expression **$2\cos x - 1$**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$2\cos x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S_{[-\pi ,2\pi[} = \left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right[$$

EXERCICE 1

1) déterminer la mesure principale des angles orientés dont une mesure en radian est :

a) $\frac{43\pi}{4}$ b) $\frac{59\pi}{3}$ c) $-\frac{25\pi}{6}$ d) $-\frac{23\pi}{6}$

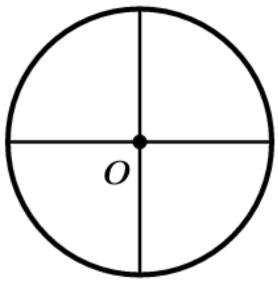
2) Parmi les mesures suivantes indiquer celles qui sont associés au même point que $-\frac{\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique

$\frac{47\pi}{12}$; $-\frac{49\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{241\pi}{12}$; $-\frac{37\pi}{12}$; $-\frac{313\pi}{12}$

EXERCICE 2

1) placer sur le cercle trigonométrique les points A , B , C , D , E , F et G représentatifs des réels suivant :

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{3}$



2) on donne $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{w},\vec{u}) = \frac{\pi}{3}$

a) Calculer la mesure principale de chacun des angles suivants :

$(\vec{w},\vec{v})$; $(-\vec{w},\vec{v})$; $(-\vec{w},-\vec{v})$

b) Donner une mesure de l'angle orienté :

$(-2\vec{u},\vec{v})$; $(\vec{v},-\vec{u})$; $(\vec{v},2\vec{u})$

EXERCICE 3

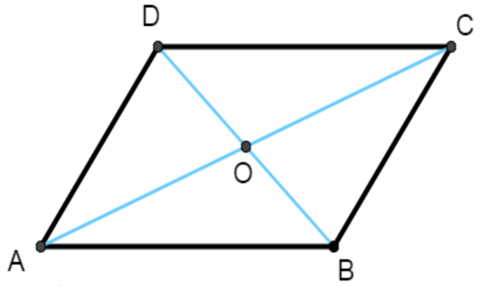
Construire un triangle ABC telque $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés suivant :

a) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})$ b) $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})$ c) $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

EXERCICE 4

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.



1) Démontrer que

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = 0$

2) Qu'elle propriété du parallélogramme a-t-on démontré ?

3) on pose que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants.

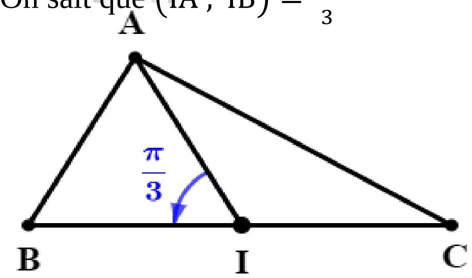
a) $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})$ c) $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$

b) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{DA})$ d) $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DA})$

EXERCICE 5

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].

On sait que $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{3}$



Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

a) $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IB})$ b) $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC})$ c) $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{CB})$

EXERCICE 6

1) soit ABC un triangle

Démontrer que :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \pi[2\pi]$

2) soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) En déduire que $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

c) Justifier de même que $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

▶ EXERCICE 7

Soit A , B , C et D trois points du plan tels que :

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$,

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et

$(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC}) = -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

Démontrer que les points A , E et C sont alignés.

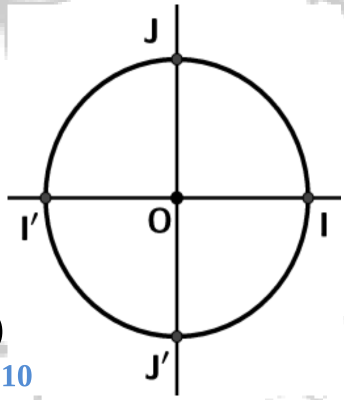
▶ EXERCICE 9

Sur un cercle trigonométrique (C), on considére les points A et B tels que :

$(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OA}) = \frac{5\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

1) $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OJ})$
2) $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{BO})$
3) $(\overrightarrow{OJ} ; \overrightarrow{OB})$
4) $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{BO})$
5) $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{OB})$
6) $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{OB})$
7) $(2\overrightarrow{OA} ; -3\overrightarrow{OB})$



▶ EXERCICE 10

Pour chacun des équations suivantes :

1) les résoudre dans ℝ, c'est –à-dire déterminer l'ensemble des réels x_i vérifiant l'équation ;

2) placer sur le cercle trigonométrique les points M_i tels que $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM_i}) = x_i$

3) Donner leurs mesures principales.

a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$

c) $\cos(3x) = 0$; d) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos(x) = 2$; f) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

g) $\tan(x) = \sqrt{3}$

▶ EXERCICE 11

1) En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de cosx et sinx

$A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$B = \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$C = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(9\pi - x)$

$D = \cos(x-\pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x+\pi) + \sin(x + \frac{3\pi}{2})$

2) Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles Associés :

$E = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{23\pi}{14}$

$F = \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{11\pi}{5}$

▶ EXERCICE 12

Résoudre les équations suivantes :

1) $2\sin x - 1 = 0$
2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$
3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$
4) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$
5) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$
6) $\sin(2\pi - 3x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$
7) $\cos x - 2 = 0$
8) $\cos(3\pi + 2x) = 0.2$

▶ EXERCICE 13

Résoudre les équations suivantes en utilisant les propriétés des angles associés

1) $\cos 2x = -\cos(\pi - x)$
2) $\sin x = -\sin(\pi - 2x)$
3) $\sin 3x = -\sin 2x$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

5) $\sin x=\cos x$

6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)= -\cos(2x-\frac{\pi}{3})$

7) $\sin(3x+\pi)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

8) $\sin(2s)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)=0$

9) $\cos x+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

EXERCICE 14

Résoudre les équations suivantes en utilisant les formules trigonométriques de base.

1) $\cos(2x)+\cos^2 x=0$

2) $\cos x+\cos(4x)=\cos(2x)+\cos(3x)$

3) $\cos x\cos(4x)=\cos(2x)\cos(3x)$

4) $1+\cos(2x)+2\cos(x)=0$

5) $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$

6) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

EXERCICE 15

Résoudre les équations homogènes en sinus et cosinus suivantes

1) $\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x=3\sin x\cos^3 x$

2) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$

3) $\sin^4 x-6\sin^3 x\cos x+11\sin^2 x\cos^2 x-6\sin x\cos^3 x=0$

4) $3\sin^2 x\cos x+4\cos^4 x=3\cos^2 x+\sin x\cos^3 x$

EXERCICE 16

Résoudre les équations linéaires en sinus et cosx suivantes :

1) $\sin x-2\cos x+2=0$

2) $\sqrt{3}\cos x-3\sin x+3=0$

3) $\sqrt{3}\cos x-\sin x-1=0$

4) $\cos x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}=0$

5) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$

EXERCICE 17

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I précisé

1. $\cos x=\frac{1}{2}$, $I=[0\,;\,3\pi[$
2. $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $I=[0\,;4\pi[$
3. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $I=]-\pi\,;\,\pi]$
4. $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}$, $I=]-\pi\,;\,\pi]$
5. $\cos(x)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $I=[0\,;2\pi[$
6. $\cos(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $I=\mathbb{R}$

EXERCICE 18

a) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équationcos $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(3x)$.

EXERCICE 19

Résoudre chacune des inéquations suivantes sur l'intervalle I précisé

1. $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $]-\pi\,;\,\pi]$
2. $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $]-\pi\,;\,2\pi]$
3. $6-12\cos x>0$; $]-\pi\,;\,\pi]$
4. $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$; $]-\pi\,;\,2\pi]$

EXERCICE 20

1) soit (E) l'équation définie par $\cos(3x)=\frac{1}{2}$

Résoudre l'équation (E) dans $]-\pi\,;\,\pi]$puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2) résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$, l'inéquation $\cos(3x)\geq\frac{1}{2}$

3) résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $2\cos^2(3x)+3\cos(3x)-2=0$